7. cvičení - Extrémy funkcí

Příklad 1 (Vzorově vyřešené)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

(a) $f(x,y,z) = 2x - y + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) $f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-3x^2-y^2}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$.

(c) $f(x,y,z) = 2x + y + 3z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x + y + z \geq 0\}$.

(d) $f(x,y,z) = y^2 + xz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + z \geq 0\}$.

Příklad 2 (Zkouškové, bez vzorového řešení)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

(a) $f(x,y,z) = x - y^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 5, (x+z)^2 + 2y^2 = 2\}$.

(b) $f(x,y,z) = x^2 + 5z^2 + 2y^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; (x-z)^2 + y^2 = 4, x - 7y - z + 2 \geq 0\}$.

(c) $f(x,y,z) = x - y^2 - 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 \leq 2, (x-2z)^2 + y^2 = 5\}$.

(d) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 9x + 8y^2 + 9z = 9, x + y + z \leq \frac{5}{4}\}$.

(e) $f(x,y,z) = (x-z)y^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, x + z \geq \frac{1}{2}\}$.

(f) $f(x,y,z) = x(y+z)$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

(g) $f(x,y) = x^2y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y - 2x \leq 1, 2x + y \leq 4, x + 2y \geq 2\}$.

(h) $f(x,y,z) = 2x - y$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 2x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

(i) $f(x,y,z) = e^{xyz}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - y + z > 0\}$.

(j) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5x - 3y + y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x - y \geq 0, x + y \leq 2, y \geq 0\}$.

(k) $f(x,y,z) = x + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 = 1, y^2 + 2z^2 < 4\}$.

Příklad 3 (Aplikace)**.**

(a) Najděte nejkratší vzdálenost bodu $[1,1,1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

(b) Dřevěná bedna tvaru kvádru bez víka má objem $V > 0$. Jaké mají být její rozměry, chceme-li minimalizovat množství dřeva použitého na její výrobu?

(c) Určete rozměry kvádru tak, aby součet délek jeho hran byl 96 cm a jeho objem byl co možná největší.

(d) Rozložte kladné číslo na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

(e) Farmář a farmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Protože se nachází u řeky, stačí jej oplotit ze tří stran. Jaké bude zadání úlohy pomocí Lagrangeových multiplikátorů?